

Title	渦輪の運動における仮想運動量 (流体方程式の特異性)
Author(s)	大島, 裕子
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 293: 79-93
Issue Date	1977-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/106188
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

渦輪の運動における仮想運動量

お茶の水大理 大島 裕子

§1 はじめに

1974 年秋に行なわれた日本物理学会の特別講演において Imai¹⁾ は仮想運動量 P 及び仮想角運動量 L の概念を提議された。この論文においては、渦分布だけが存在するとし、特別なばあいだけを考へて、実験的な検証を試みた。

渦分布だけが存在するときの P , L はそれぞれ三次元るとき、

$$P = \frac{\rho}{2} \iiint_V \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV,$$

$$L = -\frac{\rho}{2} \iiint_V r^2 \boldsymbol{\omega} dV = \frac{\rho}{3} \iiint_V \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV,$$

二次元のとき

$$P = -i\rho \iint_S \omega z dS,$$

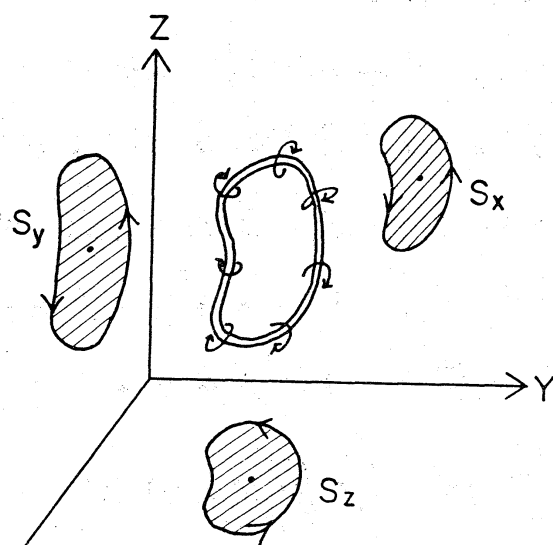
$$L = -\frac{\rho}{2} \iint_S \omega r^2 dS$$

で定義される。ここで V は考へてゐる体積, ω : 渦度, r : 距離, S : 考へてゐる面積をあらわす。更にこれを三次元空間に存在する渦輪のばあいに適用すると,

$$\rho = \frac{\rho}{2} \Gamma \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \rho \Gamma \mathcal{S} \quad \dot{\rho} = 0$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\rho}{2} \Gamma \oint_C r^2 d\mathbf{r} = -\frac{\rho \Gamma}{2\pi} \mathcal{T} \quad \dot{\mathcal{L}} = 0$$

となる。ここで Γ は渦輪の循環, \mathcal{S} は $\mathcal{S}(\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y, \mathcal{S}_z)$ であらわされる渦輪のそれぞれ x 方向の射影面積, \mathcal{T} は $\mathcal{T}(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y, \mathcal{T}_z)$ でそれぞれ x 方向での回転体積をあらわしている。オ1図。ここでは渦輪の運動の過程で変形しながら, これら ρ, \mathcal{L} がすなわち \mathcal{S}, \mathcal{T} がどのように変化するであろうかをしらべる。



オ1図

一方渦輪の運動は古くから数多くの研究者によつて理論的にも実験的にもしうべうれていて, 教科書にもその項があり (Lamb²⁾, Batchelor³⁾), 又最近 渦に関する研究が多数の研究者によつて活発になされてゐる。一般に円形の渦輪は各部分がそれぞれの渦糸よりの相対的誘導速度によつて渦輪平面に垂直に

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r} \log \frac{r}{\varepsilon}$$

の速度で進行する。ここで Γ は循環, r は渦輪の半径, ε は

輪を構成している渦糸自身の半径で $\varepsilon \ll r$ としてある。

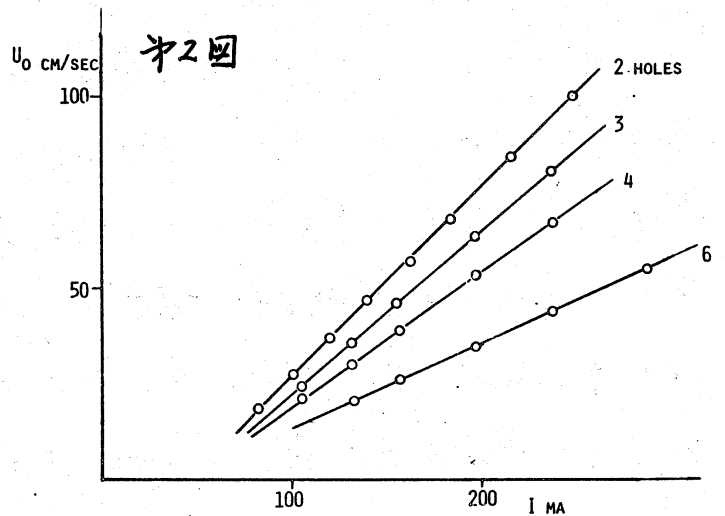
ここでは一つの渦輪の運動では、 δx だけが時間的にあまり変化せずに diffuse してゆく様子しかとうえることができなく、仮想運動量の検証の意味を失うので、変形する渦輪について実験を行った。変形する渦輪各部はその長における曲率半径に反比例するような速度でそれぞれに進行し、三次元的な変形を続けるが、ここでは更に渦糸が一度切れて、他の渦糸と結びかえられられるような複雑な変形をするばあいについて考えた。これらの渦糸のつながりかえの複雑な現象は、今回問題としている仮想運動量の概念の一つの検証としての他に、いわゆる乱流における渦のふるまいのモデルとしても、流体力学的に興味ある問題と思われるので、その過程について述べてみたい。又これらの現象は、実験的にはほとんど解析解によるものでもあるが、この報告では解析をせることができないので、1連の例をあげるにとどめ、他は解析をもとに図にかきかえたいものである。実際の解析については、水及び空気のばあいについて報告された他の論文を参照して頂きたい。4) ~ 6)

§2 実験方法

空気中で適当な orifice から空気を短かい時間、パルスの

に吹き出すことによつて, orifice の部分で shear flow ができ、渦度が集中して渦輪がつくられる。空気を短時間吹き出す方法として空気だめの空気をピストンで押す方法, orifice の背面の膜を振り子でたたく方法などがあるが, 再現性及び初速度の範囲を広く選べるという点から, orifice 後面に低周波用のラウドスピーカーを用いて直流で駆動した。この方法によれば作られた渦輪の

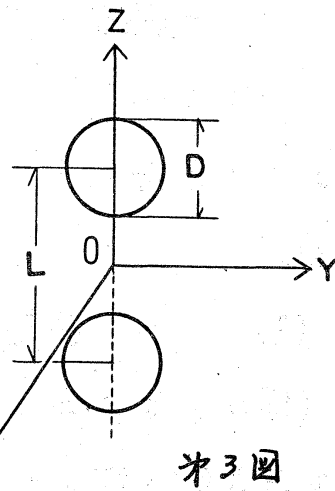
初速度と, スピーカーに流れる電流の関係は第2図で示すように線型的になる。そして約 500 mA となるとスピーカーの振動子の振りが



電流に追随しなくなつて直線からはずれ, 渦輪の速度が限界に達する。又同じ図で示されるように, orifice の開口面積に反比例して初速度はおそくなる。初速度は orifice の直径, 数, 形などによつて校正曲線を作つてあり, それに従つて任意の速度の渦輪を作る。渦輪の可視化の方法は, スピーカーと orifice の間にある煙箱の中で, 塩酸とアンモニアを反応させて塩化アンモンの煙を用いた。このようにして作られた渦輪を放出時よりの遅延回路によつて作動するモーターで

ライブラカメラで三方向から撮影し、渦輪の変形する有様を解析した。

今回の実験においては仮想運動量及び仮想角運動量の時間的な変化を実験的に示すことを目的としており、三方向に変形する渦輪としてオ3図に示すような二つの orifice から、二つの渦輪が同時に同一平面に放出され、そ



れらが干渉しあう時間的にどのような変形をするかを調べたい。ここで同じ図に示すように、渦輪の最初の進行方向をX軸に、それに垂直な平面で水平方向にY軸、鉛直方向にZ軸をとり、原点として二つの orifice の中心Oをとった。実験に使用した orifice の直径 $D = 2.0 \text{ cm}$ 、中心距離 $L = 4.0 \text{ cm}$ で、実験初速度 U_0 は $10 \text{ cm/sec} \sim 50 \text{ cm/sec}$ の範囲で、

$Re = \frac{U_0 D}{\nu}$ で定義されたレイノルズ数は $150 \sim 700$ である。他をばあいとして同一平面より四つの orifice から同時に四つの渦輪が放出される実験がなされたが、この時にも $D = 2.0 \text{ cm}$ 、隣り合う orifice の中心間距離 $L = 4.0 \text{ cm}$ とした。これらの L は実験的に渦輪の近接する渦糸成分が、お互いには直径程度の距離に近づいた時から干渉現象が顕著におこされることによつて決められた。

§3 実験結果

ニツの渦輪のばあい

ニツの orifice より渦輪が放出されるばあい、初速度 U_0 によつて干涉の様子が異なりおよそ次のように三つに大別される。

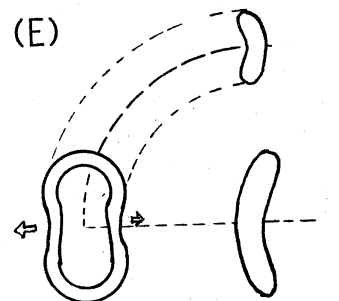
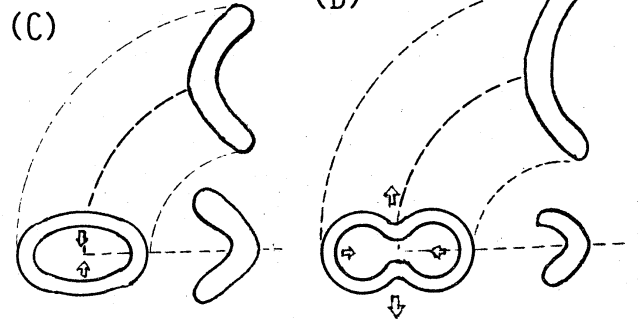
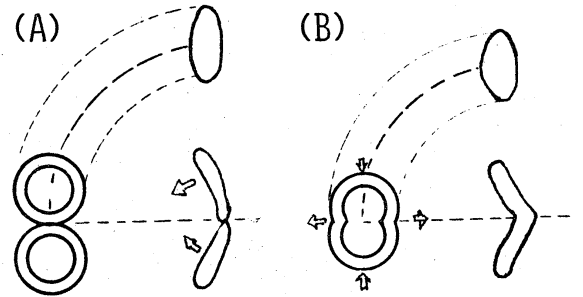
(I) ニツの渦輪 \rightarrow 一つの渦輪

オ4図

(図は三方向よりの投影図

オ4図

を模式的に描いたもので、
左側—X軸、右—Y軸、
右—Z軸に沿つてみたも
の、以下この方法によつ
て描いてある。)



まず同一平面上に放出され
たニツの渦輪は、X軸に
近い部分の進行速度が、他
方の渦輪の誘導速度によつ
て減速されて傾くため、ニツの渦輪が互か
いに近づくように方向をかえて進行し、近
接した二處で接触する。(A)。この時ニツの
輪になつて二渦糸が、その部分で切れる
と同時に他方の輪の渦糸とつなぎかえをす

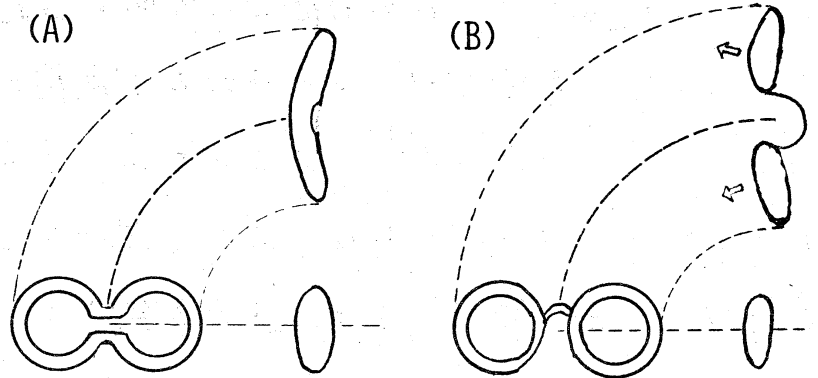
る。この段階で作られた渦輪はX方向に進行のおそいところでつよいくびれをもつ一つのゆがんだ渦輪となっている。(B)。そしてこのくびれは曲率が小さいため、その曲率に反比例するような大きな速度で外側にむけて進行する。この間外側の各部は、内側に傾いたままの進行を続ける。これをX方向よりみると、YZ平面でZ軸上に並んだ二つの渦輪はY軸上に長径、Z軸上に短径をもつ随円に近いゆがんだ形となる。(C)。(D)。これ以後は長径と短径をYZ平面上でたがいに交換するような振動を行ないながら(E)次第に円に近い形となる。この間X方向においても、長径部分では早く、短径部分ではゆっくりというように、徐々に速度を振動的にかえながら進行を続けるが、円になった時には、各部がほぼ一樣な速度でその円の面と直角な方向であるX方向に進行する。このような渦糸のつなぎかえをする速度は約 $U_0 = 17 \text{ cm/sec}$ から 22 cm/sec の範囲である。

(II) ニつの渦輪 → ニつの渦輪

才5図, 才6図(X方向よりの写真)

近接点でつなぎかえを行ない、その曲率にしかかかって進行する様子は(I)のばあいと同様であるが、放出速度が大きいため r が大きくなり、渦輪各部の進行速度も大きくなる。このためはじめの放出の時に、Z軸上に一番遠く距つていた部

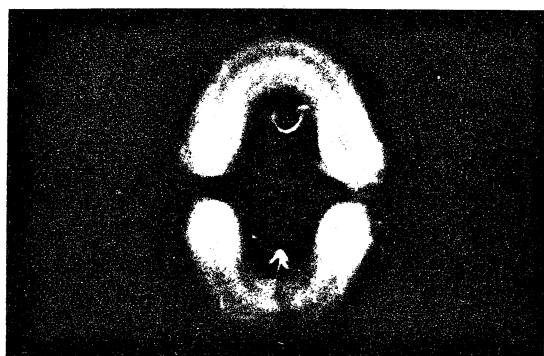
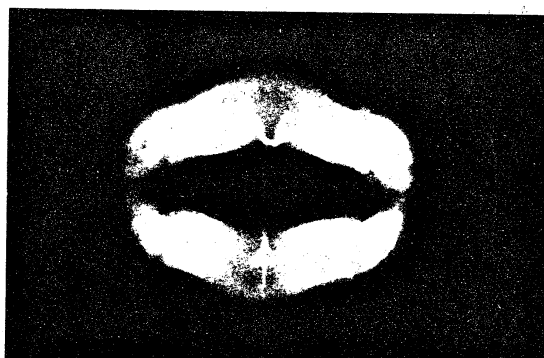
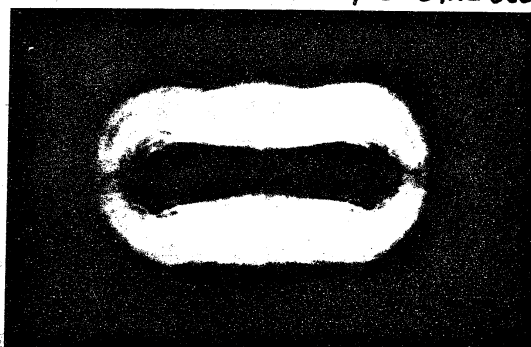
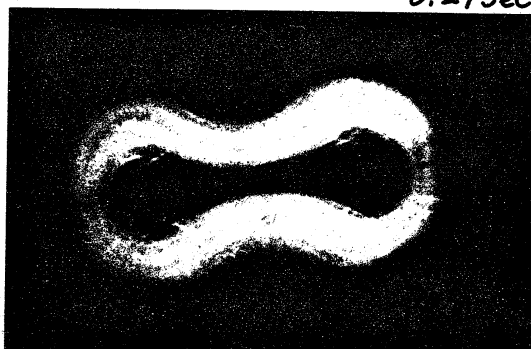
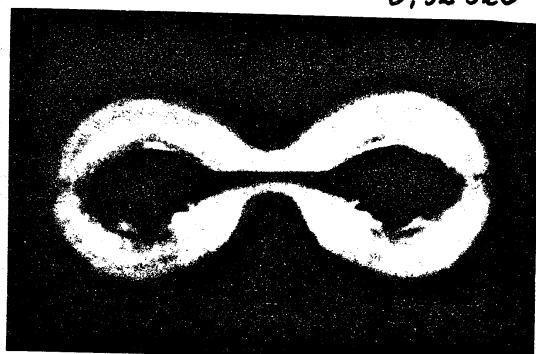
分が、正面から
ぶつかりあうよ
うにして、その
奥でも同様な渦
糸のつなぎかえ
を行って二つの

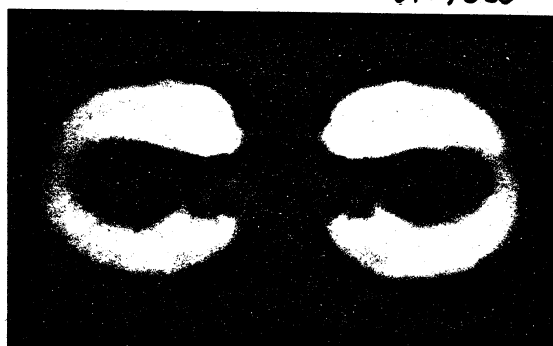
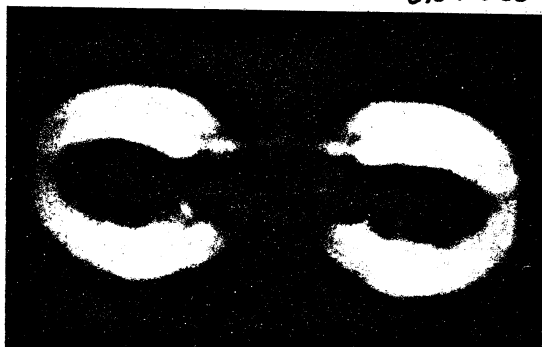


渦輪をつくる。(A) このようにしてはじめ Y 軸平面上で Z 軸
にそって中心のあった二つの渦輪は、Y 軸上に中心をもつて
並んだ二つの渦輪となり、しかも新しくできた二つの渦輪は
はじめの渦輪の両方の成分をそれぞれが併せもっている。こ
のため元の二つの渦輪も二色の異なった色で着色して区別され
ば、新しくできた渦輪はその各々が半分ずつ異なった色で形成
される。しかし α_1 と α_2 の渦糸のつなぎかえは、時間的に
非常にわずかしかなはなれておらず、この時奥では α_1 のつな
ぎかえをした部分は、 α_2 のつなぎかえをした部分より X 方
向ですっと後方 (O に近い方) にあるので、新しい二つの渦
輪は外側にむけて進行を続け、次第に二つの渦輪は遠のいて
ゆく。(B) $v_0 = 23 \text{ cm/sec} \sim 28 \text{ cm/sec}$

(Ⅳ) 二つの渦輪 → 二つの渦輪 → 一つの渦輪 オク目

(Ⅰ), (Ⅱ) のばあいと全く同じ経過をたどるが、放出時の初速
度が大きいため、 α_1 のつなぎかえをした部分の速度が十


 $T = 0.22 \text{ sec}$

 0.27 sec

 0.32 sec

 0.35 sec

 0.47 sec

 0.54 sec

 0.59 sec

 0.63 sec

才 6 図

分大きく、 $\alpha = 0$ の
つなぎかえの前後
で X 方向におくれ
ていた部分が急速
に進行することと、
内側部分がたがひ

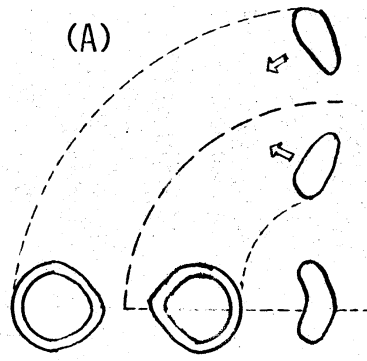
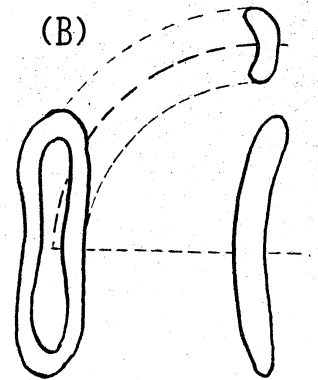


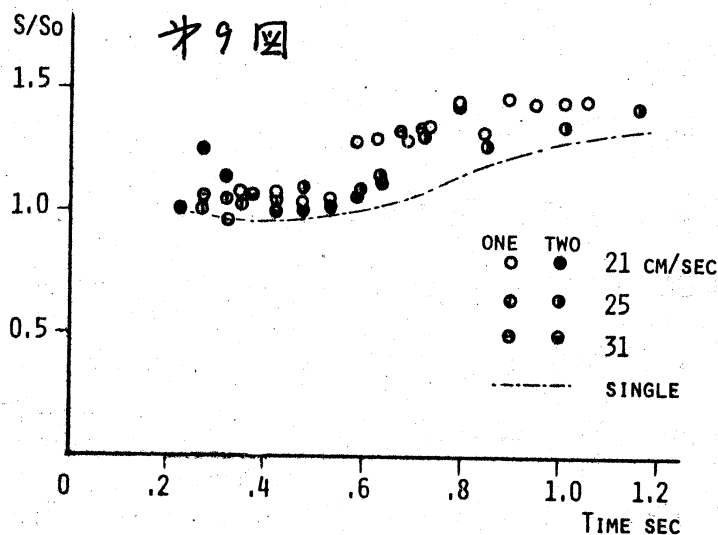
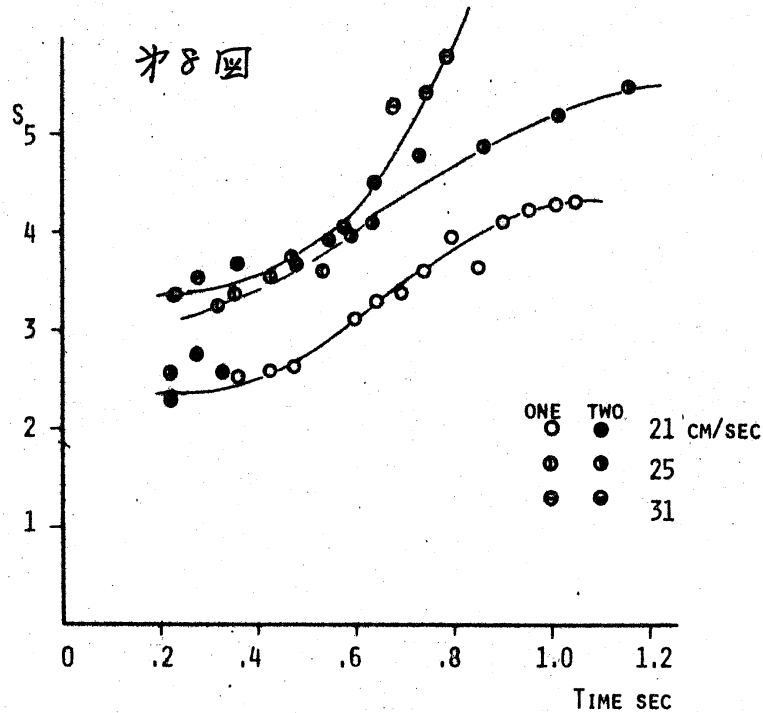
図 7



の誘導速度でおそくなることによって、二つの渦輪が外側か
ら徐々に内側に進行方向をかえ、 $Y-Z$ 平面上で Y 軸上に二つ
並んだ状態、すなわち丁度はじめの放出時と $Y-Z$ 軸を交換し
たわけで全く同じ状態が再現される。すると今までと同様の
過程をたどって、 $\alpha = 0$ のつなぎかえをした部分が $\alpha = \pi$ のつな
ぎかえも行なつて、 Z 軸に長径をもつようなゆがんだ一つの
渦輪をつくり、 $Y-Z$ 平面内での振動とともに X 軸方向の振動
も併せもつような運動を行ないながら、徐々に減衰してゆく。
この間において渦輪の進行速度は小さくなるので $\alpha = \pi$ のつな
ぎかえをおこすことは、この実験においては認められなかつた。
又そのため初速度を大きくしても、 $\alpha = 0$ 、 $\alpha = \pi$ の渦輪の
つなぎかえの際にはげしく渦糸どうしがぶつかりあうため拡散
してしまつて、きれいなつなぎかえをおこさないし、又更に
大きな初速度を与えると、最初の放出時から turbulent な渦
輪が形づくられて、つなぎかえの様子を観測することができ

ない。 $U_0 > 29 \text{ cm/sec}$.

以上三つのばあいについてX方向に射影する渦輪の占める面積を測定すると、 オ8図 のようになる。Y, Zの各方向に対しては、渦糸は同じところを逆むきに戻るからそれぞれの射影面積は0であるので、X方向のみを考慮すればよい。これは写真からの測定値であるから、近づいて来るための立体角が大きくなる効果を補正し、放出時の面積と q 比をとると オ9図 が得られる。同じ図中に破線を示されたのが、一つの渦輪が変形することなく、渦輪平面に垂直に進行するばあいの射



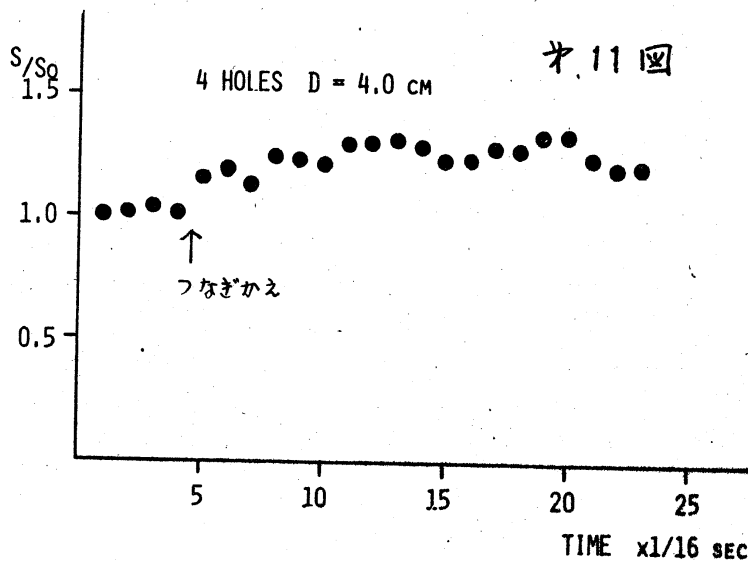
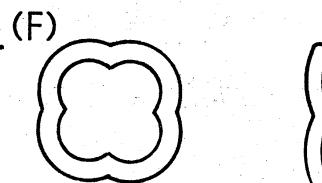
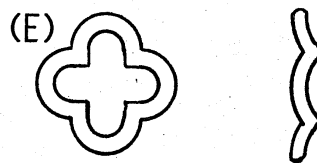
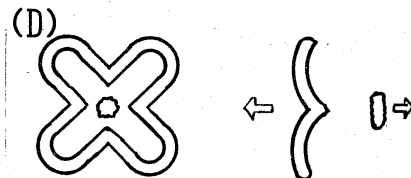
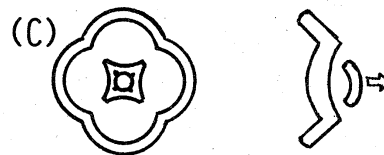
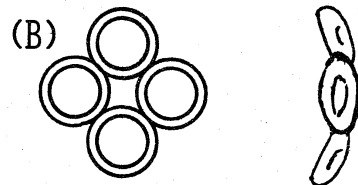
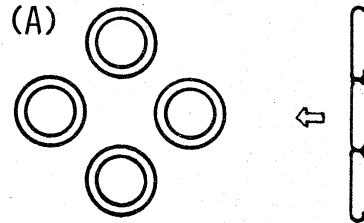
影面積と同じく比であらわしたものである。これによれば、
 ニつの渦輪が渦糸のつなぎかえを行つたことで、まわりとの
 振散現象をより多くおしよぐめたため幾分の射影面積を増加
 させたことはあるにせよ、一つの渦輪が進行してゆくのに比
 べてそれ程大きく表つてゐない。すなわち渦糸のつなぎかえ
 によつても仮想運動量 P は時間的に変らず、 $\dot{P} = 0$ とみな
 すことができる。一方仮想角運動量については、回転体積
 の不変というのであるが、回転体積はこの方法では求められ
 ない。しかしそれらの重心は求められ、X 方向よりみたとき
 に煙は原兵に重心があり、どんな変形をしても変らないこと
 から $\dot{L} = 0$ とすることが出来る。

四つの渦輪のばあい 才 10 回

四つの渦輪が干渉して渦糸のつなぎかえを行なうばあいには
 (A)、四つが相互に誘導速度を及ぼしあつて、二つのばあい
 と同様中心の X 軸に近い方へそれぞれが傾いて進行するため
 同じようなつなぎかえをするが、X 軸上まで至らないうちに
 接触 (B)、四つの渦輪がそれぞれ二ヶ所で切れて、隣りあうも
 のと結合する。その結果 外側には 1 つの渦輪の約 $3/4$ の渦
 糸が四本つながった大きな一つの渦輪ができて (C)、そのま
 まの回転方向であるために、同じ X 軸方向に X 字形 (D) とそ

の傾きを 45° 回転させた十字形との間を振動的に変形しながら進み (E), 徐々にその振動を減衰させるため, 円形に近づきながら進行を続ける (F)。ところが内側に残された約 $1/4$ の渦糸でつくられた小さな渦輪は, 今までの進行方向と逆の循環をたてるように結びつけられてしまうため, 反対方向に進みはじめるが, はじめからきれいな円形の渦輪でなく, 進行速度も各部分で異なるため, 環状に保たれるのは非常に短い時間だけであって, 各部分からたかいたかになりあうような形で diffuse してしまう。この四つのはあいの射影面積 (X 方向) をオ 9 図と

オ 10 図



同様に放出時の射影面積と q 比で作った q が才 11 図である。

このばあいには内側に作られた反対方向へ進行する渦輪の射影面積は、反対むきのベクトルである q で差しひかなければならない。しかし各時間毎には *diffuse* してしまつて見積るゝとが不可能なりで、つなぎかえのすぐあとで内側にできた渦輪の断面積が変化せずに反対方向に進行したと仮定して同じ量を差しひいてある。この結果つなぎかえをしたところで少々の差を生じているが、時間的にはほとんど一定に保たれてゐると見なすことができ、 $\dot{P} = 0$ とすることができる。

34 むすび

以上の実験結果より渦輪の運動における渦季のつなぎかえで、その運動が複雑に変化しても、仮想運動量、仮想角運動量は時間的に不変であることが検証された。勿論この実験において、煙によつて可視化されてゐる相違の中をもつ渦輪の中のどの部分に渦度が集中し、それをどのようにして検出し、又その信頼性がどの程度であるかという点で議論の余地があり、又誤差もふくまれてゐると思われる。渦度の分布の測定によつて可視化された部分との対応をつけたいと考えられ、今後の課題としたい。

References

- 1) I.Imai: 日本物理学会 29回年会予稿集 (1974) 14.
- 2) H.Lamb: Hydrodynamics (Cambridge University Press,1932)ch.7
- 3) G.K.Batchelor: An Introduction to Fluid Dynamics (Cambridge University Press,1967)ch.7
- 4) Y.Oshima: Nagare 8-1 (1976) 5.
- 5) Y.Oshima: J.Phy.Soc. Japan 32 (1972) 1125.
- 6) Y.Oshima: Natural Science Rep.Ochanomizu Univ. 26(1975)31.